**Лекція 2**

**Трикутник Паскаля**

**Теорема.** *Для довільних n , k ( kn) має місце формула Паскаля:*

**= С + С (1)**

*Доведення*

C + C =  +  = (  + ) = = =  = C

*Теорему доведено.* ■

З формули (1) випливає простий спосіб обчислення чисел **С**, як їх називають *біноміальних коефіцієнтів*. Цей спосіб називають трикутником Паскаля.

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

. . . . . . . . . . . . . . . . .

У цій таблиці кожне число, крім крайніх одиниць, дорівнює сумі двох чисел, що стоять над ним. Оскільки С = С = 1 при довільному n , то з формули Паскаля випливає, що n-ий рядок цієї таблиці складений з чисел С (k=).

**Теорема***. Кількість усіх підмножин n - елементної множини дорівнює 2n*.

*Доведення*

*( метод математичної індукції)*

1. n=1. Множина {a}, яка складається з одного елемента **а** має дві підмножини – порожню і саму себе. 2=21 . Отже, теорема для n=1 виконується

2. n=k. Припустимо, що множина з k елементів має 2k підмножин.

1. n=k+1. Доведемо, що множина, яка складається з ( k+1)- го елемента має 2k+1 підмножин.

Розглянемо множину з (k+1) - го елемента: *А*= { а1, а2, ...,аk, ak+1 }

Будь-яку підмножину цієї множини можна дістати одним з двох способів:

а) беруться всі підмножини множини *А1*= { а1, а2, ...,аk }, яка має k елементів. Їх за припущенням 2k . Це будуть всі підмножини А, які не містять елемента ak+1;

б) беруться підмножини множини *А1*і до нихприєднується елемент ak+1 . Таких підмножин буде 2k.

Всього підмножин множини *А* буде 2k+2k=2 k+1.

Отже, теорема виконується для довільного натурального n.

*Теорему доведено.* ■

**Наслідок.** Для довільного n****N виконується

C + C + C+ … + C= 2n  або = 2n

**Приклад.** Скільки є способів освітлення залу, якщо у залі 10 люстр?

**Біном Ньютона. Поліноміальна теорема.**

Двочлен ***a+b*** називається біномом. З шкільного курсу відомо, що

(*a+b*)0 = 1

(*a+b*)1 = 1×a+1×b

 (*a+b*)2 = 1×a2+ 2ab+1×b2

(*a+b*)3 = 1×a3+3a2b+3ab2+1×b3

(*a+b*)4 = (a+b)3×(a+b) = 1×a4+4a3b+6a2b2+4ab3+1×b4

Розглядаючи ці формули, легко помітити, що коефіцієнти в правих частинах дорівнюють числам з відповідних рядків трикутника Паскаля. Цей збіг не випадковий.

**Теорема.** *При довільному натуральному n має місце формула*

(a + b)n=Can + Can-1b + Can-2b2 +…+ Cbn (1)

*Доведення*

( метод математичної індукції)

1. n=1 (a+b)1 = 1×a+1×b = С×а+С×b .

2. n=k Припустимо, що рівність (1) справджується для деякого натурального n=k , тобто ( a+b)k = C ak + Cak-1b + Cak-2b2 + … +Cbk.

3. n=k+1 Доведемо, що рівність істинна для n=k+1

( a+b)k+1 = (a+b)k(a+b) = ( C ak +Cak-1b + Cak-2b2 + … +Cbk)(a +b) =

= C ak+1 + Cakb + Cak-1b2 +... + Cbk+1, або згрупувавши подібні члени матимемо ( a+b)k+1 = C ak+1 + (C + C)akb + (C + C)ak-1b2 + …+ Cbk+1.

Врахувавши, що C=С=1, С=С=1 і використавши формулу Паскаля, отримаємо ( a+b)k+1= C ak+1 + Саkb + Cak-1b2 +…+ Cbk+1.

Отже, для n=k+1 формула виявилася теж справедливою.

На основі принципу математичної індукції можна стверджувати, що формула справедлива для будь-якого натурального n.

*Теорему доведено.*

Формула розкладу степеня двочлена у вигляді суми одночленів

***( a + b)n = Can + Can-1b + Can-2b2 +…+ Cbn* (1)**

називається *формулою бінома Ньютона*.

Коефіцієнти С називаються *біноміальними коефіцієнтами.*

Якщо скористатися знаком суми, то формулу (1) можна записати так:

***( a + b)n =  an-k bk***

***Зазначимо основні в л а с т и в о с т і формули бінома Ньютона***:

1. Розклад n-го степеня бінома (1) містить n+1 членів.
2. Показники степеня при **а** спадають від n до 0 ; показники степеня при **b** зростають від 0 до n . Сума показників степенів при **а** і **b** у кожному члені розкладу дорівнює n.
3. Біноміальні коефіцієнти розкладу є числа, які стоять у n-му рядку трикутника Паскаля. Коефіцієнти членів, рівновіддалених від кінців, рівні між собою.
4. Якщо показник степеня бінома – парне число, то біноміальний коефіцієнт середнього члена є найбільшим; якщо ж показник степеня бінома – непарне число, то біноміальні коефіцієнти двох середніх членів рівні між собою і є найбільшими.
5. (k+1) –й член розкладу Т**k+1** визначається за формулою

***Т k+1= С an-k bk***  **(2)** , де *k*= 0,1,2,…,n.

1. Перший біноміальний коефіцієнт дорівнює 1, другий – n ( показник степеня бінома). Щоб знайти кожний наступний коефіцієнт, потрібно біноміальний коефіцієнт попереднього члена помножити на показник **а** цього члена і знайдений добуток поділити на число, яке відповідає порядковому номеру члена, біноміальний коефіцієнт якого визначається, тобтоС= С, 1k+1 .

**7.** = 2n,  *n, k* +, *nk.*

**8.** Сума біноміальних коефіцієнтів розкладу, які розміщенні на парних місцях, дорівнює сумі коефіцієнтів членів розкладу, які розміщені на

непарних місцях, тобто С + С + С +...= С+ С+ С+...